МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ГГУ

7 апреля 2025

1. Вычислите
$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Решите уравнение
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Будут ли функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \sec x$ линейно независимы на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$?

4. Координаты (x, y) точки M положительны и удовлетворяют неравенству $x^3 + y^3 \le x - y$. Докажите, что M лежит в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

5. Функция f непрерывна и положительна на $[-\pi/2, \pi/2]$, причем $f(x)f(-x) = 1$ при всех $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Вычислите интеграл
$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{f(x)+1} dx.$$

6. Пусть
$$f(x) = \frac{\sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}} \ (x > 0)$$
($[x]$ — целая, а $\{x\} = x - [x]$ — дробная части числа x).

Вычислите $\sup\{f(x) : x \in (0, \infty)\}$.

7. Числа a, b, c попарно различны. Координаты точек $A_1, \ldots, A_6$ получаются всевозможными перестановками числел a, b, c. Докажите, что точки $A_1, \ldots, A_6$ лежат на одной окружности.

Время выполнения задания 4 часа

Решение каждой задачи оценивается в 10 баллов

Пользоваться интернетом не разрешается

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ

1. Ответ: $2i^{n-1}$.

2. Ответ: $0, 1, 2, 3$.

3. Ответ: будут. Указание. В равенстве $a\sin x + b\cos x + c\operatorname{tg} x + d\sec x = 0$ положите последовательно $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$.

4. Указание. Перейдите к полярным координатам.

5. Ответ: 1. Указание. Заметьте, что

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{f(-x)+1} dx.$$

Поэтому

$$2I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{f(x)+1} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{f(-x)+1} dx.$$

6. Ответ: $\sqrt{2}$. Указание. Если $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (0,1)$, то

$$f(n+\alpha) = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n+\alpha}} < \sqrt{2}.$$

При этом $\lim_{x\to 2-0} f(x) = \sqrt{2}$.

7. Указание. Пусть координаты точек таковы: $A_1(a,b,c)$, $A_2(b,c,a)$, $A_3(c,a,b)$, $A_4(b,a,c)$, $A_5(a,c,b)$, $A_6(c,b,a)$. Тогда точки $A_1,\dots,A_6$ лежат в одной плоскости.

Первое доказательство. Точка $M((a+b+c)/3, (a+b+c)/3, (a+b+c)/3)$ является общим центром тяжести треугольников $\Delta A_1A_2A_3$ и $\Delta A_4A_5A_6$. При этом прямая MA_4 лежит в плоскости $\Delta A_1A_2A_3$, поскольку вектор $\overline{MA_4}$ ортогонален нормали $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$ к плоскости $\Delta A_1A_2A_3$ (смешанное произведение $(\overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}\ \overline{MA_4}) = 0$). То же верно и для прямой MA_5. Значит, точки $A_1,\dots,A_6$ лежат в одной плоскости.

Второе доказательство. Рассматривая соответствующие системы уравнений, проверяем, что прямые A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 попарно пересекаются в трех различных точках. Значит, точки $A_1,\dots,A_6$ лежат в одной плоскости.

Осталось заметить, что точки $A_1,\dots,A_6$ принадлежат сфере с центром O и радиусом $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.