МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ГГУ им. Ф. СКОРИНЫ

27 февраля 2026 г.

1. Для любого натурального n вычислите величину

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! - (n+1)!.$$

2. Матрицы A и B порядка n удовлетворяют равенству $AB = 2E$. Какие значения может принимать произведение BA?

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = ax + by + c$$

при условии $px^2 + qy^2 = 1$, где $p, q > 0$.

4. Докажите, что для любых чисел $a < b$ справедливо неравенство

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b.$$

5. Найдите величину угла между касательными к параболе $y = x^2$, проходящими через точку $A(0, -1)$.

6. Докажите, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt[4]{x}}\, dx \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Продолжительность олимпиады — 4 академических часа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ГГУ им. Ф. СКОРИНЫ

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ

1. Ответ: -1.
Указание: Воспользуйтесь тождеством $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.

2. Ответ: $2E$.
Указание: Докажите, что матрицы обратимы.

3. Ответ: $\pm\sqrt{\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}} + c$.
Указание: Заметьте, что $px^2 + qy^2 = 1$ есть уравнение эллипса с параметрическими уравнениями $x = \frac{1}{\sqrt{p}} \cos t, y = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin t$.

4. Указание: По теореме Лагранжа о конечном приращении $e^b - e^a = e^c(b-a)$ $(a < c < b)$.

5. Ответ: $\mathrm{arctg} \frac{4}{3}$.
Указание: Напишите уравнения касательных к параболе.

6. Указание: Примените неравенство Коши-Буняковского

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

.